JCSS

校正における測定不確かさの評価
内挿校正式による不確かさの見積もり

（第２版）

（JCG200S21－02）

改正：2022 年 4 月 25 日

独立行政法人製品評価技術基盤機構

認定センター

発行所　　独立行政法人製品評価技術基盤機構
認定センター
住所　〒151-0066　東京都渋谷区西原 2 丁目 49 番 10 号
TEL　03-3481-8242
FAX　03-3481-1937
E-mail　　jcss@nite.go.jp
Home page
https://www.nite.go.jp/iajapan/jcss/index.html

目　次

1. はじめに

多くの計量器では、測定対象量の連続的な測定が可能である。一方、その測定に用いる計量器は、有限な数の校正点で校正されることが一般的である。このため、これらの校正点以外でその計量器を用いて測定するときは、これらの校正結果から内挿される測定点における測定の不確かさの評価が必要となる。

このガイドは、JCSS 認定・登録事業者が、計量器（参照標準を含む。）の校正結果を元に内挿を行い、連続的な測定対象量の測定の不確かさを見積もるための初歩的な方法を例示し、もって JCSS 校正結果の活用を促進することを目的とする。

2. 適用範囲

このガイドは、JCSS 認定・登録事業者が、ある測定対象量を連続的に測定することが可能な計量器について、有限な数の校正点における校正結果を元に最小二乗法によって一次回帰式を求め内挿を行う場合、及びメーカ等の外部機関からの情報に基づき内挿を行う場合の不確かさ評価に適用する（注1）。

なお、このガイドの適用（活用）が想定される主なケースは次のとおりである。

◆校正機関が、自ら校正した計量器について校正値の内挿を行うケース

◆校正機関が、自ら導出したその内挿の結果を元に校正証明書を発行するケース

◆認定機関の審査員が、校正機関の認定審査等において妥当性確認に活用するケース

◆JCSS 等技術委員会分野別分科会において、個別の量の不確かさ見積もりガイドを検討する際の参照文書又は当該ガイドが未作成の場合の時限的に使用する文書とするケース

（注 1）個別の量ごとの指針、ガイド等がある場合には、これらを優先するものとする。また、個別の計量器ごとに制約条件がある場合には、これを考慮する必要がある。例えば、計量器の特性に起因する内挿校正式から導かれる値と実測値との差が有意なときは、ある校正か所からの不確かさの影響を別途考慮することが必要である。

3. 引用規格・文献

(1) JIS Z 8103 (2019)：計測用語

(2) ISO/IEC Guide 99（2007）：International vocabulary of metrology – Basic and general concepts and associated terms（VIM）（国際計量計測用語－基本及び一般概念並びに関連用語（VIM））

(3) JCRP21：JCSS 登録及び認定の一般要求事項

4. 用語及び定義

このガイドで用いる用語及び定義は、3.引用規格による。用語「校正」及び「参照（測定）標準」は、JIS Z 8103 でそれぞれ次のとおり定義されている（注2）。

401 校正（calibration） 指定の条件下において、第一段階で、測定標準によって提供される不確かさを伴う量の値とそれに対応する指示値との不確かさを伴う関係を確立し、第二段階で、この情報を用いて指示値から測定結果を得るための関係を確立する操作。 **415 参照（測定）標準**（reference standard） ある組織又はある場所において、ある与えられた種類の量の他の測定標準を校正するために指定された測定標準。

（注 2）参照（測定）標準は、JCSS では『特定二次標準器』及び『常用参照標準』が該当する。

5.　最小二乗法による一次回帰式の不確かさ

5.1　一般

内挿校正式は、その計量器の特性に応じた形の関数 $f(x)$ を用いることとし、必要な数 n_{p} のパラメーターを決定する。例えば、関数が一次式 $f(x)=ax+b$ であれば $n_{\mathrm{p}}=2$（ただし、ゼロ点を通るものと仮定すれば $f(x)=ax$ となり $n_{\mathrm{p}}=1$）、二次式 $f(x)=ax^2+bx+c$ であれば $n_{\mathrm{p}}=3$、正弦関数 $f(x)=a\sin(bx+c)$ であれば $n_{\mathrm{p}}=3$ となる。この時、内挿式における自由度 ν は、校正点数を n として $\nu=n-n_{\mathrm{p}}$ となる（注3）。

この場合、自由度が小さければ信頼性の確保が難しく、内挿校正式の信頼区間の幅が大きくなることは自明であるから、校正点は実用的な範囲で多く取ることが望ましい。また、計量器の特性からある種の不確かさ要因を排除するような校正点の取り方はすべきでない。例えば、周期誤差が想定される光波距離計で、変調波長の二分の一の整数倍ごとの校正データを用いれば、見かけ上は小さな不確かさの内挿校正式が得られる。しかしすべての校正値がほとんど同じ位相での測定となり、周期誤差という不確かさの要因をあらかじめ除いたデータとなっていることから、ここから得られた内挿式とその不確かさを他の位相での測定に利用することは避けるべきである。

以上のような考慮から、適切な校正データのセットが得られた場合、内挿に当たっては一般的に最小二乗法が適用される。その結果として想定した関数 $f(x)$ の各パラメーターを求めることができ、同時に、最小二乗法を適用した際の関数 $f(x)$ の信頼区間の幅を求めることができ、内挿校正式の不確かさを見積もることができる。

（注 3）ある校正点において繰り返し測定を行った場合は、その繰り返し回数も n にカウントする。

5.2　内挿校正式を一次回帰式で求める場合の不確かさ

多くの計量器は、その指示値が測定すべき量と直線関係になるよう作製されており、内挿校正式として一次回帰式（直線回帰式）を用いるケースは多い。この場合、まずこの計量器を標準器により校正し一次回帰式を求める。次に、この計量器を用い測定を行う場合は、その一次回帰式に従って測定値（計量器の指示値）を補正し、測定結果を算出する。つまり、この測定結果の算出は、一次回帰による値の補正で逆推定[1),2),3)]と呼ばれる方法を用いることになる。具体的な数値例を用いて解説する。

> 例：ある計量器の校正
>
> フルスケールで 0（注4）から 120 まで測定できる計量器があるとする。校正は、この計量器で標準器（校正点：20, 40, 60, 80, 100）（注5）を測定した時の読み値と標準器の値を比較することによって行う。また、この計量器の線形性は保たれているものとする。
>
> ここでは、標準器の校正の不確かさが無視できる場合、又は、各標準器の校正の不確かさが等しく、各標準器の間の相関係数が 1 の場合について解説する。

（注 4）この事例では、一般的な解説とするため特定の「単位」は記載していない。通常、量の数値とともに「単位」が表記されるべきである。

（注 5）標準器とは、計量器を校正するための参照標準を示す（例：長さ校正で用いられるブロックゲージ、温度校正で用いられる白金抵抗温度計等。）。

この校正を図示すると、図 1 のようになる。

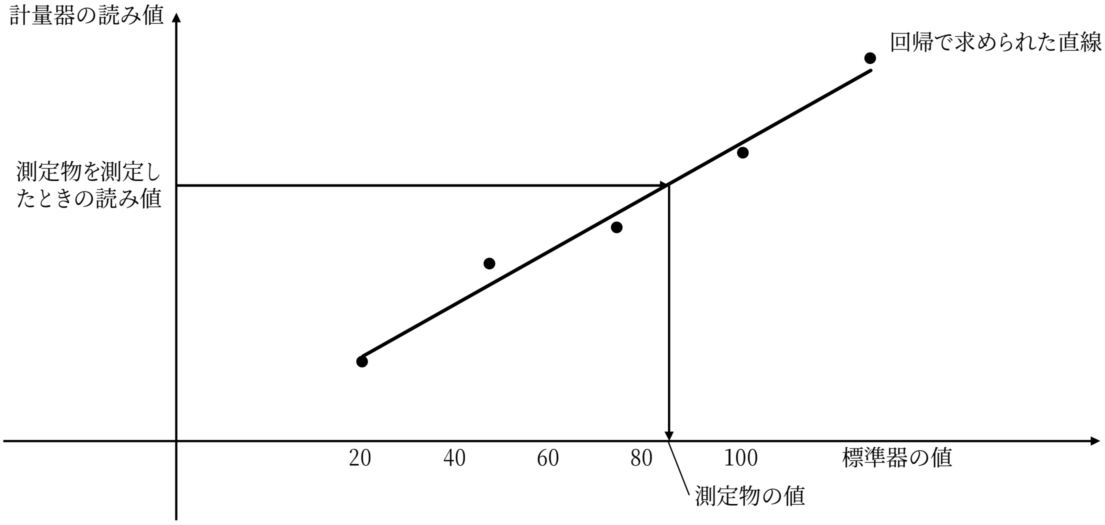

図 1：計量器の校正の模式図

つまり、標準器の各校正点において、計量器の読み値を調べ、その結果から校正直線を求める。その後、何か測定したいもの（測定物）を計量器で、その値を読み取る。しかしその値は、校正直線の y の値を得ることになる。その y の値から x の値を逆に求め、それを測定物の値として得ることになる。

この測定におけるモデル式は、測定物の値を x_0、計量器の読み値を y_0 とすると、一次回帰式 $y_0 = \hat{\alpha} + \hat{\beta} x_0$ を変形した式 $y_0 = \hat{\beta}(x_0 - \bar{x}) + \bar{y}$ の逆関数である、

$$x_0 = \frac{y_0 - \bar{y}}{\hat{\beta}} + \bar{x} \qquad \cdots\cdots\cdot (1)$$

を用いる（注 6）。ここで“ ^ ”は推定値を表す。

（注 6）式 $y_0 = \hat{\alpha} + \hat{\beta} x_0$ を用いると、$\hat{\alpha}$ と $\hat{\beta}$ の相関を考慮した不確かさ評価を行う必要があるが、式 $y_0 = \hat{\beta}(x_0 - \bar{x}) + \bar{y}$ を用いると、その相関を考慮する必要がない。この詳細は、参考 2 で述べている。

また、ここでは x 軸の不確かさは存在しない、又は無視できるという前提で解説を進める。計量器の校正のときに得られたデータ（標準器の値及び計量器の読み値）より $\hat{\beta}, \bar{x}, \bar{y}$ を得て、式(1)を用いて、計量器の読み値 y_0 を補正し、測定物の値 x_0 を得ることになる。このようなときの不確かさ評価は、式(1)に不確かさの伝播則を適用し、

$$u_c^2(x_0) = \left[\frac{\partial x}{\partial y_0}\right]^2 u^2(y_0) + \left[\frac{\partial x}{\partial \bar{y}}\right]^2 u^2(\bar{y}) + \left[\frac{\partial x}{\partial \hat{\beta}}\right]^2 u^2(\hat{\beta})$$

$$= \frac{1}{\hat{\beta}^2} u^2(y_0) + \frac{1}{\hat{\beta}^2} u^2(\bar{y}) + \left[-\frac{y_0 - \bar{y}}{\hat{\beta}^2}\right]^2 u^2(\hat{\beta}) \qquad \cdots\cdots\cdot (2)$$

となる。ここで、y のばらつきを、残差の分散 $\hat{\sigma}_e^2$ で、

$$\hat{\sigma}_e^2 = \frac{\sum \left[y_i - \left\{\hat{\beta}(x_i - \bar{x}) + \bar{y}\right\}\right]^2}{n-2} \qquad \cdots\cdots\cdot (3)$$

で推定すると、$u^2(\bar{y})$ 及び $u^2(\hat{\beta})$ はそれぞれ、

$$u^2(\bar{y}) = \frac{\hat{\sigma}_\mathrm{e}^2}{n} \quad \cdots\cdots (4)$$

$$u^2(\hat{\beta}) = \frac{\hat{\sigma}_\mathrm{e}^2}{\sum (x_i - \bar{x})^2} \quad \cdots\cdots (5)$$

である。なお、式(3)において自由度が $n-2$ となるのは、一次回帰式の場合 $n_\mathrm{P} = 2$ となるためである。

$u^2(y_0)$ は、測定物を測定時の計量器の読み値のばらつきを示す分散である。測定物の値が安定した状態で測っている限り、校正の際、標準器を測定したときの読み値のばらつきと同じであることが期待される。また、この読み値は l 回の繰り返し測定値であるとすると $u^2(y_0)$ は、

$$u^2(y_0) = \frac{\hat{\sigma}_\mathrm{e}^2}{l} \quad \cdots\cdots (6)$$

となる。よって、式(2)に式(4)、式(5)及び式(6)を代入すると、

$$\begin{aligned} u_\mathrm{c}^2(x_0) &= \frac{1}{\hat{\beta}^2}\frac{\hat{\sigma}_\mathrm{e}^2}{l} + \frac{1}{\hat{\beta}^2}\frac{\hat{\sigma}_\mathrm{e}^2}{n} + \left[-\frac{y_0 - \bar{y}}{\hat{\beta}^2}\right]^2 \frac{\hat{\sigma}_\mathrm{e}^2}{\sum (x_i - \bar{x})^2} \\ &= \frac{\hat{\sigma}_\mathrm{e}^2}{\hat{\beta}^2}\left\{\frac{1}{l} + \frac{1}{n} + \frac{(y_0 - \bar{y})^2}{\hat{\beta}^2 \sum (x_i - \bar{x})^2}\right\} \quad \cdots\cdots (7) \end{aligned}$$

となる。

x 軸の値（標準器の値）の不確かさが存在しない、又は無視できる場合は、式(7)により不確かさが評価できるが、その不確かさが無視できない場合も存在する。通常は相関のある x 軸の値（使用する標準器が同一の校正機関で校正されているため）を用いているため、式(1)の $\bar{x}$ の項に不確かさの伝播則を当てはめた式、即ち、

$$\begin{aligned} u_\mathrm{c}^2(x_0) &= \left[\frac{\partial x}{\partial y_0}\right]^2 u^2(y_0) + \left[\frac{\partial x}{\partial \bar{y}}\right]^2 u^2(\bar{y}) + \left[\frac{\partial x}{\partial \hat{\beta}}\right]^2 u^2(\hat{\beta}) + \left[\frac{\partial x}{\partial \bar{x}}\right]^2 u^2(\bar{x}) \\ &= \frac{1}{\hat{\beta}^2} u^2(y_0) + \frac{1}{\hat{\beta}^2} u^2(\bar{y}) + \left[-\frac{y_0 - \bar{y}}{\hat{\beta}^2}\right]^2 u^2(\hat{\beta}) + u^2(\bar{x}) \\ &= \frac{1}{\hat{\beta}^2}\frac{\hat{\sigma}_\mathrm{e}^2}{l} + \frac{1}{\hat{\beta}^2}\frac{\hat{\sigma}_\mathrm{e}^2}{n} + \left[-\frac{y_0 - \bar{y}}{\hat{\beta}^2}\right]^2 \frac{\hat{\sigma}_\mathrm{e}^2}{\sum (x_i - \bar{x})^2} + u^2(\bar{x}) \\ &= \frac{\hat{\sigma}_\mathrm{e}^2}{\hat{\beta}^2}\left\{\frac{1}{l} + \frac{1}{n} + \frac{(y_0 - \bar{y})^2}{\hat{\beta}^2 \sum (x_i - \bar{x})^2}\right\} + u^2(x) \quad \cdots\cdots (8) \end{aligned}$$

を用いる。この式(8)によって逆推定の不確かさ評価を行う。

（参考 1）ここでは、各標準器の校正の不確かさが等しく $u(x)$ であり、また各標準器の間の相関係数が 1 の場合について解説しており、この場合、$u(\bar{x}) = u(x)$ が成立する。

なお、$u(x)$ は通常、計量器の校正に用いた標準器の不確かさを用いれば良い。また、状態が安定したものを測るのではなく、測定の繰り返しごとに測定対象物が変化することに由来するばらつきがあると考えられる場合には、式(6)の代わりに、繰り返し測定のデータから求めた y_0 の分散である $\hat{\sigma}'^2_{\mathrm{e}}$ を用いた

$$u^2(y_0)=\frac{\hat{\sigma}'^2_{\mathrm{e}}}{l} \qquad \cdots\cdots\cdot(9)$$

を式(8)に代入すればよい。

実際にデータで計算した事例を以下に示す。標準器を用いて計量器の校正を行ったときのデータが表 1 のとおりであったとする。

表 1：計量器の校正データ

標準器の値	被校正計量器の読み値
20	20.001
40	39.997
60	60.007
80	79.999
100	100.003

まず、これらのデータを用いて直線回帰を行う。

$$\bar{x}=\frac{20+40+60+80+100}{5}=60$$

$$\bar{y}=\frac{20.001+39.997+60.007+79.999+100.003}{5}=60.0014$$

$$\hat{\beta}=\frac{\sum(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sum(x_i-\bar{x})^2}=1.00003$$

$$\hat{\alpha}=\bar{y}-\hat{\beta}\bar{x}=-0.00040$$

$$\sum x_i^2=22000$$

$$\sum \bar{x}^2=18000$$

$$\hat{\sigma}_e=\sqrt{\frac{\sum\left[y_i-\left\{\hat{\beta}\left(x_i-\bar{x}\right)+\bar{y}\right\}\right]^2}{n-2}}=0.004305$$

計量器の校正に用いた標準器の拡張不確かさ（k=2）が 0.002 であったと仮定し、また、ある測定物をこの計量器で 3 回測定した平均値が 75.426 であり、そのばらつきは $\hat{\sigma}^2_{\mathrm{e}}$ で代用可能であったと仮定すると、この測定物の不確かさは、これらを式(8)に代入し、

$$u_c^2(x_0)=\frac{\hat{\sigma}_e^2}{\hat{\beta}^2}\left\{\frac{1}{l}+\frac{1}{n}+\frac{(y_0-\bar{y})^2}{\hat{\beta}^2\sum(x_i-\bar{x})^2}\right\}+u^2(x)$$

$$=\frac{0.004305^2}{1.00003^2}\left\{\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{(75.426-60.0014)^2}{1.00003^2(22000-18000)}\right\}+0.001^2$$

$$=0.0000109859+0.000001$$

$$u_c(x_0)=0.00346$$

となる。拡張不確かさは、信頼の水準の区間に対応した包含係数を乗じて求める（注 7）。

（注 7）逆推定で不確かさを評価する場合、計量器の読み取りポイントごとに不確かさは異なる。また、有効自由度 ν_{eff} も同様に読み取りポイントごとに異なる。しかし、実際の校正作業において、ポイントごとの有効自由度 ν_{eff} を計算するのは、非常に煩雑な作業となる。そこで、有効自由度 ν_{eff} を一定値にするため、式(8)において y_0 と $\bar{y}$ が同じ値のときの有効自由度 ν_{eff} を代表値として利用することは容認されるだろう。上記の例の場合、

$$u_c^2(x_0)=\frac{0.004305^2}{1.00003^2}\left\{\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{(60.0014-60.0014)^2}{1.00003^2(22000-18000)}\right\}+0.001^2$$

$$=\frac{0.004305^2}{1.00003^2}\left\{\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+0\right\}+0.001^2$$

$$=0.0000098837+0.000001$$

$$u_c(x_0)=0.00330$$

となる。このときの有効自由度 ν_{eff} は、GUM 付属書 G.6.4 の Welch-Satterthwaite の式から

$$\nu_{\mathrm{eff}}=\frac{u_c^4(y)}{\sum_{i=1}^{n}\frac{u_i^4(y)}{\nu_i}}=\frac{u_c^4(y)}{\frac{u_1^4(y)}{\nu_1}+\frac{u_2^4(y)}{\nu_2}+\frac{u_3^4(y)}{\nu_3}+\ldots+\frac{u_n^4(y)}{\nu_n}}$$

$$=\frac{0.00330^4}{\frac{\left(\sqrt{\frac{0.004305^2}{1.00003^2}\Big/3}\right)^4}{3}+\frac{\left(\sqrt{\frac{0.004305^2}{1.00003^2}\Big/5}\right)^4}{3}+0+\frac{0.001^4}{\infty}}=6.86$$

となる。なお、$u(y_0)$ 及び $u(\bar{y})$ の自由度は、$\hat{\sigma}_e$ の自由度と等しいため両方 3 である。ただし、y_0 について式(9)を用いた場合、$\hat{\sigma}'_e$ の自由度が $u(y_0)$ の自由度となる。

（参考 2）最小二乗法による一次回帰は、x と y の間に直線関係が成立しているとき、

$$y=\alpha+\beta x \qquad \cdots\cdots（参考 2\text{-}1）$$

と表すことができる。この α と β はそれぞれ、切片と傾きの真の値を表す。本来

であればすべてのデータはこの直線上に乗るはずであるが、y は測定の不完全さを持つため値がばらつく。そのため、α、β は完全に求められるものではなく、推定値を求められるにすぎない。回帰によって推定される式は、

$$y = \hat{\alpha} + \hat{\beta}x \qquad \cdots\cdots\text{（参考 2-2）}$$

となる。ここで、$\hat{\alpha}$ と $\hat{\beta}$ はそれぞれ、α と β の推定値である。
また、式（参考 2-2）で表された直線回帰式は、傾きと切片が相関を持つことから、入力量を x_i、出力量を y_i とすると、次式のように変形することにより、相関を考えることなく不確かさを算出することができる。

$$y_i = \hat{\beta}(x_i - \bar{x}) + \bar{y} \qquad \cdots\cdots\text{（参考 2-3）}$$

式（参考 2-3）では、式（参考 2-2）の x に変数変換を施し、$x_i - \bar{x}$ としている。この場合求める未知数が傾き $\hat{\beta}$ と切片 $\hat{\alpha}$ ではなく、傾き $\hat{\beta}$ と $\bar{y}$ となる。この式から求められる直線は、傾き $\hat{\beta}$ の値が変わろうと、必ず x と y の平均値（点 $(\bar{x}, \bar{y})$）を通るため、$\bar{y}$ の値に影響を与える事がない。よって、傾きと $\bar{y}$ の間には相関がない。

6. 外部機関からの情報を利用する場合の不確かさ

計量器メーカがその計量器の直線性などの性能をカタログ等で保証している場合、又は当該計量器の優良な直線性を示すデータが別途入手可能な場合、校正の結果を当該データの確認と位置づけることで、不確かさ評価が可能な場合もある。特に標準器が限られた数の離散的な値しか提供できず、かつ、当該計量器の信頼性がその業界で共通認識といえるような場合においては、特定の条件下でメーカ仕様等の性能から内挿式の不確かさを推定することが適切な場合もある（注 8）。

この場合、計量器のある校正点の校正の標準不確かさを u_{cal} とし、メーカ仕様等から導かれた内挿式の標準不確かさを u_{fit} とすると、その合成標準不確かさは、

$$u_{\mathrm{c}} = \sqrt{u_{\mathrm{cal}}^2 + u_{\mathrm{fit}}^2} \qquad \cdots\cdots\text{（10）}$$

と推定することができる。

（注 8）このような適用は個別の計量器に対する知見があらかじめ得られる場合に限られるので、個別分野ごとに合意があることが望ましい。ある計量器が、事実上市場を独占していて、かつ、その計量器が、メーカが保証する性能を有していることがよく知られている場合、その計量器に対する知見は得られているとみなすこともできる。

7. 外挿校正式の適用

【留意事項】

外挿校正式の適用は、第一義的には、それぞれの量ごとに適用の可否について、技術的見地からその適切性を勘案の上、決定すべきものである。その適用の可否を検討する際に、そもそも「一般論としてできないこと。」を唯一の理由として外挿を認めないことは避けるべきである。一般論としては「条件付きで受け入れは可能」と考えるべきである。

前節まで内挿校正式について述べてきたが、これと同じ手法で外挿校正式を得ることも可能である。しかし、式(8)で示したように、実際に校正した値から離れたか所では不確かさの値が大きくなり、実態より大きな不確かさになるケースも少なからずあるだろう。逆に、校正範囲を僅かに出た領域で急激に性能が劣化するケースも考えられる。このように外挿には不安定な要因がつきまとうものの、計量器を校正範囲より僅かに外れたか所で使用することを禁じることは現実的ではなく、個別の分野ごとに合意されている場合には、外挿は受け入れ可能であることを考慮すべきである。

8. 参考文献

1) 技術者のための統計的方法 近藤 良夫、船坂 渡：共立出版株式会社（1967）
2) EURACHEM/CITAC Guide CG4 Qualifying Uncertainty in Analytical Measurement: 2000
3) 回帰分析を用いた不確かさ評価について　田中 秀幸：第 4 回 NMIJ 不確かさクラブ総会資料（2010）

以　上

JCSS 校正における測定不確かさの評価 内挿校正式による不確かさの見積もり
（第２版）改正のポイント

・タイトルの変更
・引用規格・文書の変更
・参考文献の変更

主な改正箇所には下線を付しています。